ΑΝΩΤΑΤΟ ΣΥΜΒΟΥΛΙΟ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΕΤΟΥΣ 2008
(ΠΡΟΚΗΡΥΞΗ 2Π/2008)
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

Κλάδος: **ΠΕ 03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ **ΠΡΩΤΗ** ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ
(**Γνωστικό αντικείμενο**)
Σάββατο 31-1-2009

Α

*Να απαντήσετε στα επόμενα δύο (2) ισοδύναμα **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ**. Να αναπτύξετε τις απαντήσεις σας στο ειδικό **ΤΕΤΡΑΔΙΟ**. Κάθε ερώτημα συμμετέχει κατά **25 %** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας.*

ΕΡΩΤΗΜΑ 1ο:

α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+x^2\eta\mu\dfrac{2}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

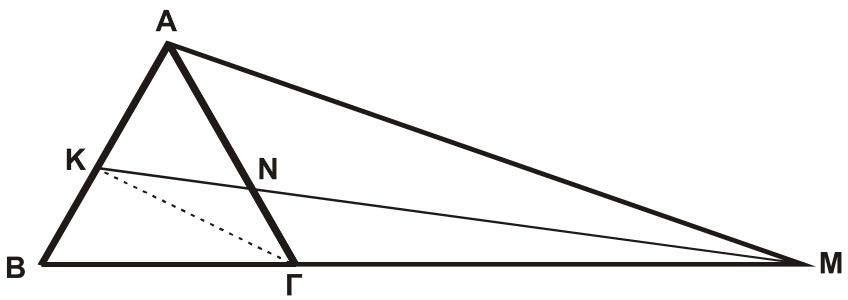
i. Βρείτε την παράγωγο $f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και εξετάστε αν η $f'(x)$ είναι συνάρτηση συνεχής στο σημείο $x=0$.

ii. Για κάθε $\varepsilon>0$ να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι αύξουσα στο διάστημα $(-\varepsilon,\varepsilon)$.

β) Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά μήκους a. Δύο σημεία K και N βρίσκονται αντίστοιχα πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ έτσι ώστε η ευθεία ΚΝ να τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ (βλ. σχήμα). Αν τα τρίγωνα ΑΚΝ, ΝΓΜ και το τετράπλευρο ΚΒΓΝ έχουν το ίδιο εμβαδόν, τότε:

i. αποδείξτε ότι η ΚΓ είναι παράλληλη προς την ΑΜ.

ii. υπολογίστε το μήκος των ΑΚ, ΑΝ και ΓΜ συναρτήσει του a.



γ) Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathrm{A}=[a_{ij}], 1\le i,j\le n$ και $a_{ij}\in\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ με $\lambda_1\neq\lambda_2$ και δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{x}\in\mathbb{R}^n, \vec{y}\in\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε: $\mathrm{A}\vec{x}=\lambda_1\vec{x}$ και $\mathrm{A}\vec{y}=\lambda_2\vec{y}$, να αποδείξετε ότι τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2ο:

α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{a}$, $0<x<1$ και $a>1$.

i. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα (0,1).

ii. Αποδείξτε ότι για όλα τα $x,y\in(0,1)$ και $a>1$ ισχύει $f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$.

iii. Αποδείξτε ότι, αν $x>0,\ y>0,\ a>1$ και $x+y=1$, τότε ισχύει:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{a}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{a}\ge\frac{5^{a}}{2^{a-1}}$$

β) Οι τέσσερις τιμές ενός στατιστικού δείγματος είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με μέση τιμή $\overline{x}=5$ και τυπική απόκλιση $s=\sqrt{5}$. Προσδιορίστε τις τιμές αυτές (ο τύπος της διακύμανσης ή διασποράς ορίζεται από τη σχέση $s^{2}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\overline{x})^{2}$).

γ) Τρεις πόλεις Α, Β, Γ βρίσκονται κατά μήκος ενός αυτοκινητοδρόμου με αποστάσεις ΑΒ=200 km, ΒΓ=400 km (και ΑΓ=600 km). Ένα αυτοκίνητο κινούμενο συνεχώς ξεκινά από την πόλη Α, περνάει από την πόλη Β μετά από 3 ώρες και φθάνει στην πόλη Γ σε 6 ώρες. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά 3 ώρες, έτσι ώστε το αυτοκίνητο τη μία χρονική στιγμή είχε διπλάσια ταχύτητα απ' ό,τι την άλλη (η συνάρτηση που εκφράζει το διάστημα συναρτήσει του χρόνου είναι συνεχής και παραγωγίσιμη).

Β

*Τα επόμενα δύο **ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ** (**3ο** και **4ο**) αποτελούνται το καθένα από έξι (6) ισοδύναμες ερωτήσεις. Να απαντήσετε στις ερωτήσεις αυτές με τη μέθοδο των πολλαπλών επιλογών στο ειδικό **ΑΠΑΝΤΗΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ.***

ΕΡΩΤΗΜΑ 3ο:

- *Το ερώτημα συμμετέχει κατά **25 %** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας. Επομένως, κάθε ερώτηση συμμετέχει με **4 1/6** μονάδες στο βαθμό της πρώτης θεματικής ενότητας.*

1. Το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις δύο τεθλασμένες γραμμές $y=|x-1|$ και $y=3-|x|$ ισούται με:

α) 3.
β) 4.
γ) 5.
δ) 6.

2. **Σε μια σφαίρα είναι εγγεγραμμένος ένας ορθός κώνος ο όγκος του οποίου ισούται με το $\frac{1}{4}$ του όγκου της σφαίρας. Αν το ύψος του κώνου h είναι διάφορον της ακτίνας της σφαίρας, τότε ο όγκος της σφαίρας ισούται με:**

α) $\frac{4}{3}\pi\sqrt{5}h^3$

β) $\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5}-1\right)h^3$

γ) $\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5}-2\right)h^3$

δ) $\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5}-3\right)h^3$

---

3. **Η τιμή της παράστασης $\mathrm{K}=\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)^4+\left(\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\right)^4$ ισούται με:**

α) $\frac{1}{2}$

β) $\frac{2}{5}$

γ) $\frac{3}{4}$

δ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

4. **Αν οι συντελεστές του 2^ου^, 3^ου^ και 4^ου^ όρου του διωνυμικού αναπτύγματος $\left(x+y\right)^n$ αποτελούν με τη σειρά αυτή διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, τότε ο φυσικός αριθμός n ισούται με:**

α) 6
β) 7
γ) 9
δ) 10

---

5. **Αν $a>0$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{-a}^{a}\left|x\left(x-a\right)\left(x-2a\right)\left(x-3a\right)\right|dx$ ισούται με:**

α) $7a^5$

β) $8a^5$

γ) $9a^5$

δ) $10a^5$

---

6. **Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y=2x+1$ και το σημείο $\mathrm{A}(2,1)$. Οι συντεταγμένες του συμμετρικού τού σημείου A ως προς την ευθεία (ε) είναι ίσες με:**

α) $x=-\dfrac{3}{2}, \qquad y=\dfrac{12}{7}$

β) $x=\dfrac{1}{2}, \qquad y=-\dfrac{3}{5}$

γ) $x=-\dfrac{8}{7}, \qquad y=\dfrac{15}{4}$

δ) $x=-\dfrac{6}{5}, \qquad y=\dfrac{13}{5}$

ΕΡΩΤΗΜΑ 4ο:

- *Το ερώτημα συμμετέχει κατά **25 %** στη διαμόρφωση της βαθμολογίας της πρώτης θεματικής ενότητας. Επομένως, κάθε ερώτηση συμμετέχει με **4 $^{1}/_{6}$ μονάδες** στο βαθμό της πρώτης θεματικής ενότητας.*

7. **Σε ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών υπάρχουν προς πώληση 600 ηλεκτρικοί λαμπτήρες. Από αυτούς οι 200 κατασκευάστηκαν στο εργοστάσιο Α, 250 στο εργοστάσιο Β και 150 στο εργοστάσιο Γ. Αν είναι γνωστό ότι η πιθανότητα ένας λαμπτήρας να μην είναι ελαττωματικός είναι 0,93, 0,96, και 0,88 αντίστοιχα για τα εργοστάσια Α, Β και Γ, τότε η πιθανότητα να πωληθεί ένας λαμπτήρας από τους 600 μη ελαττωματικός ισούται με:**

α) 0,92.
β) 0,93.
γ) 0,94.
δ) 0,95.

---

8. **Το διάστημα των τιμών $x\in\mathbb{R}$ που επαληθεύουν την ανίσωση $log_2\left(x-2\right)+log_2\left(x-3\right)\le 1$ είναι το:**

α) $\left(3,\,4\right]$

β) $\left[4,\,5\right]$

γ) $\left[5,\,8\right]$

δ) $\left[6,\,10\right]$

---

9. **Αν $0<a<\dfrac{\pi}{2}$, τότε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2^2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2^3}\cdots\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$ ισούται με:**

α) $\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha}$

β) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\alpha}$

γ) $\dfrac{\alpha}{\eta\mu\alpha}$

δ) α

---

10. **Αν** ρ_1, ρ_2 **είναι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας, τότε η τιμή της παράστασης** $K = (1+\rho_1)^{3000} + (1+\rho_2)^{3000}$ **ισούται με:**

α) –1.
β) 1.
γ) 2.
δ) 4.

---

11. **Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση** $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ **και ένα σημείο** $M(x_0, y_0)$ **της υπερβολής με** $x_0 > 1$**.**

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής και τις παράλληλες από το σημείο M **προς τις ασύμπτωτες ισούται με:**

α) $\frac{1}{2}$
β) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
γ) 1
δ) $\frac{4}{3}$

---

12. **Μεταξύ όλων των κυλινδρικών δοχείων με όγκο** $V cm^3$**, το ύψος εκείνου που έχει την ελάχιστη ολική επιφάνεια ισούται με:**

α) $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$
β) $\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$
γ) $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$
δ) $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$
